UNIVERSITATEA OVIDIUS DIN CONSTANȚA

DOMENIUL de DOCTORAT: MATEMATICĂ

Metrical Theory of Some Continued Fraction Algorithms

REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE

Dr. Dan LASCU

2020

Rezumat

Lucrarea de faţă reprezintă teza de abilitarea a autorului şi conţine rezultatele obţinute după anul 2010, an în care acesta şi-a obţinut doctoratul în matematică sub îndrumarea Domnului Academician Marius Iosifescu.

Acestă teză este o prezentarea sistematică a unor dezvoltări în fracţie continuă care au fost studiate de către autor, individual sau în colaborare, în ultimii 10 ani.

Până în zilele noastre, funcţia lui Gauss, pe care se bazează teoria metrică a fracţiilor continue regulate, a fascinat cercetători din diverse ramuri ale matematicii şi ştiinţei, cu numeroase aplicaţii în informatică, cosmologie şi teoria haosului. În ultimul secol, matematicienii au deschis drumuri noi în acest domeniu. În afara dezvoltărilor în fracţie continuă regulată, numeroase alte dezvoltări în fracţie continuă au fost studiate.

Teoria metrică a fracţiilor continue constă în studierea proprietăţilor şirului aleator al numitorilor parţiali ai fracţiei continue şi are ca punct de plecare studiile lui C.F. Gauss (1777 - 1855). Astfel, amintim una din problemele formulate de Gauss şi înregistrată de acesta în jurnalul său pe 25 octombrie 1800 ca fiind problema cu numărul 113. Doisprezece ani mai târziu, i-a scris despre această problemă lui Laplace într-o scrisoare datată 30 ianuarie 1812. Iată ce îi scria Gauss lui Laplace (într-o traducere aproximativă):

"... reiau o problemă curioasă de care m-am ocupat acum vreo 12 ani, şi căreia nu i-am găsit o soluţie satisfăcătoare la acel moment. Ar trebui să îi acorzi câteva minute pentru a o rezolva şi sunt sigur că vei putea găsi o soluţie completă. Iată problema. Fie M o necunoscută cu valoarea între 0 şi 1 pentru care toate valorile sunt echiprobabile sau respectă, mai mult sau mai puţin, aceeaşi lege. Prespunem că această valoare

poate fi reprezentată prin fracţia continuă

$$M = \frac{1}{a^{(1)}} + \frac{1}{a^{(2)}} + \ldots .$$

Care este probabilitatea ca, după excluderea unui număr finit de termeni ce se află până la $a^{(n)}$, partea rămasă

$$\frac{1}{a^{(n)}} + \frac{1}{a^{(n+1)}} + \ldots$$

să aparţină intervalului de la 0 la x ? Am notat aceasta cu $P(n, x)$ şi am presupus că pentru M, toate valorile sale sunt echiprobabile: $P(0, x) = x$".

Chiar dacă nu menţionează explicit asta, Gauss trebuie să fi cunoscut relaţia de recurenţă

$$P(n+1, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(P\left(n, \frac{1}{i}\right) - P\left(n, \frac{1}{x+i}\right) \right),$$

deoarece scria că, pentru "un motiv foarte simplu", avem (în notaţii moderne):

$$\lim_{n\to\infty} P(n, x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}, \quad x \in [0, 1].$$

În aceeaşi scrisoare, Gauss scria că toate "încercările de a rezolva problema au fost în zadar."

Teza este structurată pe 5 capitole.

Din dorinţa de a face teza uşor de citit/studiat, adică de a fi citită de sine stătător pe cât de mult posibil, am introdus în primul capitol multe din noţiunile care apar şi se repetă în celelalte capitole. Astfel, am descris spaţiile Banach care apar des în text cu normele corespunzătoare lor, am amintit câteva concepte generale de teoria ergodică, inclusiv Teorema ergodică a lui Birkhoff pentru măsuri invariante, am dat cateva noţiuni de bază despre lanţurile Markov şi am descris pe larg problema lui Gauss amintind câteva din soluţiile primite de-a lungul timpului. De asemenea, am dat definiţia şi proprietăţile generale ale operatorului Perron-Frobenius, operator care are un rol esenţial în determinarea măsurilor invariante şi în studierea proprietăţilor lor. Poate cea mai importantă parte a primului capitol este chiar ultima sa secţiune. Aici am descris noţiunea de *sistem aleator cu legături complete*, un produs exclusiv al Şcolii de Probabilităţi din România (M. Iosifescu [20]). Am dat proprietăţile importante ale acestora, dar şi două exemple.

În capitolul al 2-lea am colectat toate rezultatele obţinute de autor în cele 3 articole publicate despre acelaşi subiect [57, 37, 58]. Motivaţi de problemele de dezvoltări în fracţie continuă aleatoare, S. Chakraborty şi B.V. Rao [9] au iniţiat un studiu sistematic al dezvoltărilor în fracţie continuă ale unui număr în termeni de un iraţional $\theta \in (0, 1)$. Această nouă dezvoltare a numerelor reale pozitive se numeşte *θ-dezvoltare*. În articolul din *Journal of Function Spaces* din 2014, am făcut un studiu detaliat al teoriei metrice a acestor dezvoltări, demonstrând prima teoremă Gauss-Kuzmin aplicând metoda sistemelor aleatoare cu legături complete. În 2017, în articolul din *Publicationes Mathematicae Debrecen* [37], am folosit metoda lui Szüsz [62] pentru a obţine o viteză de convergenţă mai bună decât cea din articolul anterior. În fine, în articolul apărut în *Journal of Number Theory* [58], în 2019, am rezolvat teorema Gauss-Kuzmin referitoare la extensia naturală a transformării care generează θ-dezvoltarea. De asemenea, în ultima secţiune a capitolului, proprietăţile caracteristice ale operatorului Perron-Frobenius pe spaţiul funcţiilor cu variaţie mărginită ne permit să determinăm marginile inferioară şi superioară explicite ale erorii ceea ce furnizează un rezultat mult mai bun a vitezei de convergenţă.

În capitolul al 3-lea am discutat despre N-dezvoltările în fracţie continuă introduse de Burger şi colectivul în 2008 [6]. Am considerat familia de funcţii $\{T_N : N \in \mathbb{N}_+\}$ care reprezintă o generalizare a funcţiei lui Gauss. Prin aplicarea succesivă transformării T_N se obţine N-dezvoltărea în fracţie continuă a unui număr din intervalul $(0, 1)$. Capitolul este format din rezultatele obţinute în 3 articole [36, 35, 59] publicate între 2016-2020. Astfel, în articolul din *Mathematical Reports* [36] am dat proprietăţile metrice de bază ale N-dezvoltărilor şi am definit şi analizat proprietăţile operatorului Perron-Frobenius asociat lui T_N. Amintim că, reprezentarea ca lanţ de ordin infinit (sau lanţ cu legături complete) a şirului numitorilor parţiali ai N-dezvoltării ne permite o formulare concisă a rezultatelor obţinute. Utilizând comportamentul ergodic al sistemului aleator cu legături complete asociat N-dezvoltării în fracţie continuă, în articolul din *Journal of Mathematical Analysis and Applications* [35], am determinat limita şirului $\left(\mu\left(T_N^n < x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$ a distribuţiilor. În sectiunile 3.5.1 şi 3.5.2 am introdus rezultatele din articolul din *Publicationes Mathematicae Debrecen* [59]. Astfel, în sectiunea 3.5.1 am prezentat teorema Gauss-Kuzmin asociată extensiei naturale a sistemului dinamic asociat N-dezvoltărilor. Apoi, cu ajutorul operatorului de tranziţie asociat sistemului aleator cu legături complete pe spaţiul Banach al funcţiilor cu variaţie mărginită, am dedus formele explicite ale marginilor inferioară şi superioară a erorii, ceea ce furnizează o estimare mai bună a vitezei de convergenţă.

În capitolul al 4-lea am colectat rezultatele conţinute în cele 3 articole referitoare la *fracţiile continue generalizate de tip Rényi* [38, 39, 60]. În articolul din *Acta Mathematica Hungarica* [38] am abordat teoria metrică a fracţiilor continue de tip Rényi via teoriei dependenţelor cu legături complete. Mai exact, am obţinut o versiune a teoremei Gauss-Kuzmin pentru acest tip de dezvoltări aplicând proprietătile sistemelor aleatoare cu legături complete. Odată obţinută ρ_N, măsura finită, invariantă şi ergodică pentru transformarea de tip Rényi, R_N, care generează dezvoltarea în fracţie continuă de tip Rényi, rezultatele clasice ale teoriei ergodice, cum ar fi teorema ergodică a lui Birkhoff, ne furnizează informaţii precise despre frecvenţa la care apare un element al dezvoltării. Trebuie subliniat că teorema ergodică nu oferă nicio informaţie despre viteza de convergenţă din problema Gauss-Kuzmin care se referă la comportamentul asimptotic al $\mu\left(R_N^{-n}\right)$ când $n \to \infty$, unde μ este o măsură de probabilitate. Astfel, este necesară o teoremă de tip Gauss-Kuzmin. Folosind extensia naturală a transformării R_N, obţinem lanţul de ordin infinit al şirului aleator al numitorilor parţiali ai dezvoltării. Apoi, aratăm că sistemul aleator cu legături complete asociat acestei dezvoltări este un sistem cu contracţie, iar operatorii săi de tranziţie sunt regulaţi în spaţiul Banach al funcţiilor lipschitziene. Acesta ne permite să rezolvăm o variantă problemei Gauss-Kuzmin. În acest rezultat, constantele apărute sunt departe de a fi optime. Astfel, în articolul din *Acta Arithmetica* [39] am continuat investigaţiile asupra comportamentului asimptotic al funcţiilor de distribuţie ale transformării de tip Rényi. Pentru a demonstra o teoremă tip Gauss-Kuzmin-Lévy pentru R_N, aplicăm metoda lui Szüsz [62]. Menţionăm faptul că utilizând acestă metodă obţinem mai multe informaţii despre viteza de convergenţă, pe care o exprimăm în funcţie de funcţiile zeta ale lui Hurwitz. Dar, nici acestă viteză de convergenţă nu este optimă. Din acest motiv, în articolul apărut în *Periodica Mathematica Hungarica* [60] am folosit o abordare de tip Wirsing pentru a ne apropia (doar) de viteza de convergenţă optimă. Astfel, problema de tip Gauss-Kuzmin-Lévy pentru transformarea R_N este abordată utilizând proprietăţile operatorului Perron-Frobenius prin restricţionarea domeniul acestuia la spaţiul Banach al funcţiilor cu derivata continuă pe $[0, 1]$. Obţinem, astfel, marginile inferioară şi superioară ale erorii care oferă o estimare rafinată a vitezei de convergenţă.

În ultimul capitol, autorul prezintă succint câteva din planurile de viitor referitoare la partea ştiinţifică, dar şi didactică.

Teza se încheie cu bibliografia care conţine 64 de referinţe, citate în totalitate în cadrul textului.

Mulţumiri

Mulţumiri speciale se îndreapta către îndrumătorul meu de doctorat, Acad. Marius Iosifescu, de la Institutul de Statistica Matematica şi Matematică Aplicată "Gheorghe Mihoc-Caius Iacob" al Academiei Române, care mi-a influenţat cariera încă de la început.

Doresc să mulţumesc colaboratoarei mele, Dr. Gabriela Ileana Sebe, de la Universitatea Politenică din Bucureşti, cu care m-am înţeles excelent în cei aproape 10 ani de când colaborăm împreună.

De asemenea, mulţumiri deosebite şi familiei mele, în special soţiei şi fetiţei noastre, care mi-au permis să amân anumite activităţi gospodăreşti pentru a-mi acorda timp pentru studiu.

Constanţa, Mai 2020 D.L.